

3-D 有限元转子模型减缩的旋转子结构法

左彦飞, 王建军, 马威猛

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 为了对 3-D 有限元转子模型进行减缩, 利用 Guyan 减缩法的基本原理, 结合转子动力学分析理论, 提出了易于实际应用的减缩方法——旋转子结构法并利用 ANSYS 程序将其实现。利用该方法减缩了某涡扇发动机转子模型 21% 的自由度数。减缩模型前 20 阶最大固有频率百分误差为 0.43%, 除第 17 阶振型置信因子为 0.98 外, 其余振型置信因子均为 1, 临界转速计算的最大误差为 0.46%。计算结果证明该方法是可行的。

关 键 词: 旋转子结构; 陀螺效应; 3-D 有限元; 模型减缩; 转子动力学

中图分类号: V231.96

文献标志码: A

Rotating substructure method for 3-D finite element rotor model reduction

ZUO Yan-fei, WANG Jian-jun, MA Wei-meng

(School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: For reducing 3-D finite element rotor model, rotating substructure method, a reduction method easy to operate which was derived from the basic principle of Guyan reduction method and analysis theory of rotor dynamics was presented, and it could be practically used by ANSYS program. 21% degrees of freedom of a turbofan engine rotor model was reduced by this method. The maximum percent error of the first 20 order natural frequencies of reduced model is 0.43% and all the modal assurance criterion are 1 except that of the 17th mode of vibration of 0.98. The maximum critical rotating speed error is 0.46%. All the results show that the proposed method is valid.

Key words: rotating substructure; gyroscopic; 3-D finite element;
model reduction; rotor dynamics

涡扇发动机的高低压转子结构中低压转子是包含空心轴的柔性转子, 高压转子有复杂的盘鼓结构, 两个转子间通过中介轴承相连。类似的发动机转子模型都非常复杂, 采用梁单元或传递矩阵法建立的转子模型很难模拟实际发动机的转子动力特性。3-D 有限元模型能精确体现转子的具体结构形式, 易于考虑离心力及陀螺效应的影响, 在转子动力学研究领域应用越来越多^[1-5]。

然而, 采用 3-D 有限元建模分析时, 庞大的单

元数量会消耗不必要的计算时间, 占用巨大的计算资源。尤其当需要重点研究转子某一部分的动力学特性时, 还需要考虑其他部分的影响, 这时有选择地对转子的其他部分进行减缩, 可以提高计算效率, 减少计算分析时间。因此, 如何提高模型的计算效率, 在保证计算结果准确的同时, 尽可能减少模型的自由度, 是转子系统建模过程中值得研究的重要内容。

一般结构的减缩方法主要是 Guyan 减缩法

和模态综合法。Guyan 减缩法基于静态减缩理论,选择主自由度对模型进行静态减缩。减缩后,模型的刚度矩阵是精确的,质量矩阵和阻尼矩阵是近似的。在不考虑系统阻尼的情况下,模态综合法能最大程度地减缩系统自由度,而且可以通过选择恰当的模态截断频率保证所要分析频段内模型的精确性^[6-8]。在 ANSYS 等大型商业软件中已经有了这两种方法的计算模块和相应的减缩算法。

与一般结构不同的是,转子模型的减缩需要考虑由于转动引起的陀螺效应。目前,转子模型的减缩也是在 Guyan 减缩法或模态综合法的基础上演变发展的。在 Guyan 进行静态减缩的基础上 Guyan 和 O'Callahan 添加了质量变换修正项,在一定程度上改善了 Guyan 减缩法的动态特性^[9-10]。O'Callahan 提出了系统等效减缩扩展(SEREP)法,通过主自由度的无阻尼模态矩阵变换系统总体矩阵,减缩系统自由度^[11],但没有考虑陀螺效应。在此基础上,文献[12]给出了考虑阻尼矩阵后修正的 SEREP 法,并用简单梁模型进行了验证。考虑系统的陀螺效应后,陀螺矩阵形式上是一般转子动力学方程中的阻尼项,因此考虑陀螺效应的模态减缩方法,大多是在状态空间中进行复模态求解。Khulief 等给出了实模态(无阻尼)和复模态(有阻尼)减缩梁单元转子模型的方法,并对减缩模型进行了验证,指出了复模态减缩模型计算转子响应特性遇到的困难^[13]。曾亮等提出了阻尼陀螺系统动力响应复模态分析方法,推进了复模态分析理论^[14]。Stringer 等用复模态减缩方法对齿轮-转子系统进行减缩,并对减缩系统的响应进行了计算验证^[15]。此外,Shanmugam 等提出了考虑陀螺效应的固定-自由界面模态综合法,改进了单一的模态综合法,计算了梁单元转子的模态特性和稳态不平衡响应^[16]。

从上述文献的研究内容和研究进展可以看出,采用 3-D 有限元方法进行复杂结构转子动力学研究越来越多,模型减缩问题也日益突出,而转子减缩的相关理论研究的对象还是梁单元转子模型,且集中于对复模态综合法的研究。然而,复模态减缩在实际中很少采用,因为特征值会受到阻尼和随转速变化的陀螺矩阵的影响,计算很复杂^[17]。在大型商业软件 ANSYS, NASTRON 中,模态综合法计算的模块都不能考虑阻尼,因而基于这些软件的二次开发也比较困难。

本文利用 Guyan 减缩法的基本原理,结合转子动力学分析理论,根据陀螺矩阵不同于一般阻

尼矩阵的特有性质,提出了易于程序实现和实际应用的旋转子结构法。通过 ANSYS 中的 APDL Math 命令修改子结构阻尼矩阵,获得用户定制的旋转子结构超单元。然后利用旋转子结构减缩典型转子模型,并对减缩模型的精度进行了验证,计算了减缩模型的临界转速,结果证明了旋转子结构法的可行性。

1 考虑陀螺效应的旋转子结构法

1.1 转子动力学方程

结构的一般动力学方程为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

式中 M, C, K 分别为系统的综合质量矩阵、综合阻尼矩阵和综合刚度矩阵; F 为外激励向量; u 为位移向量。

在转子动力学中,假设在小不平衡量及小变形条件下,同时保证转子系统模型是轴对称结构,在转子转速为稳定的 ω 时,转子动力学微分方程形式为

$$M\ddot{u} + (C + G)\dot{u} + (K + B)u = F \quad (2)$$

式中 G 是反对称的陀螺力矩影响矩阵,矩阵元素为 ω 的函数; B 为旋转阻尼矩阵,也是受转速影响的反对称矩阵。

由陀螺矩阵的特殊性质,方程可写为

$$M\ddot{u} + (C + \omega G')\dot{u} + (K + B)u = F \quad (3)$$

式中 G' 为单位转速(1 rad/s)下的陀螺矩阵。当不考虑系统阻尼时式(3)简化为

$$M\ddot{u} + \omega G'\dot{u} + Ku = F \quad (4)$$

1.2 基于 Guyan 减缩法的旋转子结构法

首先,考虑一般静态方程

$$Ku = F \quad (5)$$

将方程组分成两部分,主(master)自由度和从(slave)自由度,用下标“m”表示主自由度,下标“s”表示从自由度,得到

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (6)$$

或者展开

$$K_{mm}u_m + K_{ms}u_s = F_m \quad (7)$$

$$K_{sm}u_m + K_{ss}u_s = F_s \quad (8)$$

由式(8)将 $K_{sm}u_m$ 移到右端,并左乘 K_{ss}^{-1} 得到

$$u_s = K_{ss}^{-1}F_s - K_{ss}^{-1}K_{sm}u_m \quad (9)$$

将式(9)代入式(7)消去 u_s 得

$$(K_{mm} - K_{ms}K_{ss}^{-1}K_{sm})u_m = F_m - K_{ms}K_{ss}^{-1}F_s \quad (10)$$

或简写为

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (11)$$

式中

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_m - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{F}_s \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_m \quad (14)$$

至此,完成了子结构由完整自由度向主自由度的转换.其中 $\hat{\mathbf{K}}$ 和 $\hat{\mathbf{F}}$ 分别代表超单元的刚度矩阵和载荷向量.

由式(1)经过减缩的变换矩阵进行减缩变换得到应用于子结构的动力学方程

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (15)$$

式中得到 $\hat{\mathbf{K}}$ 和 $\hat{\mathbf{F}}$ 的方式为式(12)和式(13),质量矩阵的减缩方式由下式得到

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{sm} - \mathbf{M}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (16)$$

这种近似减缩方法由 Guyan 提出^[9].类似方式得到子结构的阻尼矩阵

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{C}_{sm} - \mathbf{C}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{C}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (17)$$

需要指出的是,在刚度矩阵减缩的过程中,减缩是精确的.在质量矩阵和阻尼矩阵的减缩中,减缩是近似的.

在转子系统中,一般只考虑轴承处的油膜阻尼或其他局部阻尼,不考虑转子的结构阻尼,因此,由式(2)忽略阻尼得到

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (18)$$

经过 Guyan 减缩变换得到旋转子结构的动力学方程

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{G}}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (19)$$

与阻尼矩阵减缩方法相同

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{G}_{sm} - \mathbf{G}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{G}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (20)$$

比较式(4)、式(18)得

$$\mathbf{G} = \omega\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mm} & \mathbf{G}_{ms} \\ \mathbf{G}_{sm} & \mathbf{G}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\mathbf{G}'_{mm} & \omega\mathbf{G}'_{ms} \\ \omega\mathbf{G}'_{sm} & \omega\mathbf{G}'_{ss} \end{bmatrix} \quad (21)$$

对于单位转速的 $\mathbf{G}'$ 经同样的变换并将式(21)代入式(20)得

$$\hat{\mathbf{G}} = \omega\hat{\mathbf{G}}' \quad (22)$$

式(22)的意义在于,旋转子结构任意转速下的陀

螺矩阵可以由其对应的单位转速下的陀螺矩阵乘以转速得到.这样当子结构转速变化时,不必每次重新生成陀螺矩阵,只需给原陀螺矩阵乘一个转速修改系数.旋转子结构的其他使用方法与一般子结构完全相同.

1.3 旋转子结构的使用

旋转子结构法可以考虑陀螺效应,适用于一般转子系统的局部阻尼问题. ANSYS 中,由固定坐标系下可以考虑陀螺效应的单元组成的子结构,可以生成带有阻尼矩阵(无阻尼时即为陀螺矩阵)的超单元(super element).通过修改超单元中的阻尼矩阵获得满足要求的旋转子结构.用户可以使用 ANSYS APDLMath 中的命令依据式(22)修改超单元矩阵,将修改后的超单元重新导入转子系统,即可得到新转速下的超单元.图1为旋转子结构法在 ANSYS 程序中的实现流程图.

对图1的说明:

- 1) 可以同时使用多个子结构,模型可以是多转子系统.
- 2) 未减缩部分包括:重点分析的位置,存在局部阻尼的位置,刚度随转速变化的弹簧等特殊位置或单元.
- 3) 子结构主自由度选取的好坏直接关系到旋转子结构法计算精度的高低.

选择主自由度是使用旋转子结构法的关键步骤.基于静态减缩理论和旋转结构特点,选择主自由度主要考虑以下几点:

- 1) 子结构与原模型的交界面上的节点自由度都做主自由度.
- 2) 一般结构减缩中,节点处质量与刚度比 m_{ii}/k_{ii} 值较大处,选做主自由度.
- 3) 低阶振型振幅最大处,质量的影响较大,需要考虑设置必要的主自由度.
- 4) 计算中要保证模型的轴对称性,主自由度节点需要保证轴对称性.经过比较计算,绕转轴每隔 45° 选择一组主自由度为最佳选择.
- 5) 有外载荷作用的节点处选为主自由度.
- 6) 在上述选择主自由度的基础上,依据结构及振动特性,适当删减密集节点,使主自由度数量最少同时保证减缩精度.

总之,主自由度的选择需要考虑的因素比较多,对于实际工程情况,需要具体问题具体分析,这要求有一定的经验.不过,如果综合考虑了上述几点,选出的主自由度一般能满足分析需要.

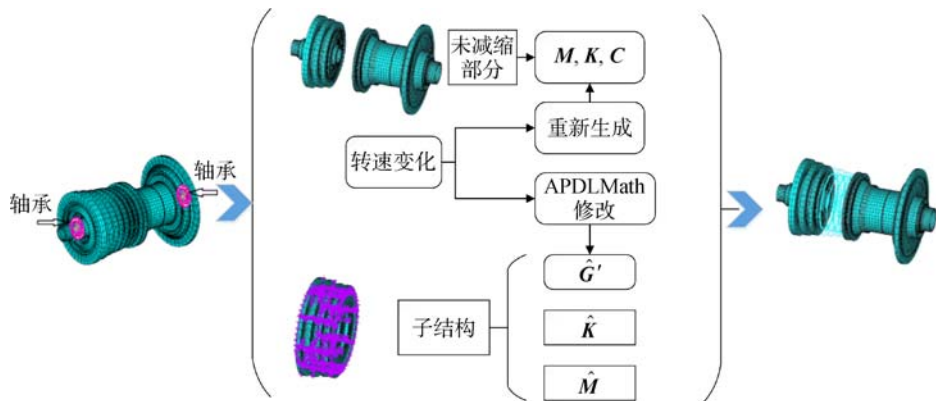


图1 旋转子结构使用流程图

Fig.1 Flow chart of using rotating substructure

2 典型转子模型减缩实例

2.1 减缩模型计算精度验证

2.1.1 固有频率百分误差

减缩模型的固有频率与原模型的对应阶次的固有频率百分误差(percent error)即为固有频率百分误差(E_p)^[17].在考虑了陀螺力矩的减缩模型中,其固有频率是转速的函数,因此,需要验证不同频率下(转子可能工作转速范围内)对应阶次的固有频率.对于带有旋转子结构的减缩模型固有频率百分误差为

$$E_{pj}(\Omega) = \frac{\omega'_j(\Omega) - \omega_j(\Omega)}{\omega_j(\Omega)} \times 100\% \quad (23)$$

式中 ω'_j 为减缩模型的第 j 阶固有频率, ω_j 为原模型第 j 阶固有频率, Ω 为转速.

2.1.2 振型相似性

对于减缩模型,不仅需要保证固有频率的准确,同时需要确保振型与原模型相似.通常模型的相似性可以通过振型置信因子(modal assurance criterion,量符号记为 C_{ma})确定,其表达式为

$$C_{mar}(\Omega) = \frac{[\Psi_t^{(r)T} \Psi_a^{(r)}]^2}{[\Psi_a^{(r)T} \Psi_a^{(r)}][\Psi_t^{(r)T} \Psi_t^{(r)}]} \quad (24)$$

式中 $\Psi_a^{(r)}$ 为原模型的第 r 阶模态振型矢量, $\Psi_t^{(r)}$ 为减缩模型的第 r 阶模态振型矢量.在比较模态向量(振型向量)计算结果时,程序会对减缩模型和原模型的振型向量两两比较,给出对应阶次的振型相似性.当 C_{ma} 为 1.00 时,两个振型完全相同,越接近于 1.00 相似性越大, C_{ma} 最小为 0^[17].同样由于陀螺力矩的影响,转子的某阶振型也会随转速变化而改变,因此,需要对减缩模型相同阶次不同转速情况下的振动模态进行比较.实际应

用中,主要研究未减缩部分的振型相似性,因此本文比较的 C_{ma} 结果未对子结构进行扩展.

2.2 典型转子减缩模型及模态验证

采用的验证模型为某型发动机高压转子模型,如图2所示.该发动机高压转子由9级压气机和1级高压涡轮组成,其中所有的叶片简化为与原叶片组质量、转动惯量都相同的等效质量环.减缩后的模型如图3所示.

减缩前后模型规模比较见表1.

用 ANSYS 中的 QRDAMP 法计算前 20 阶固有频率,计算所得第 1 阶固有振型如图4和图5所示.从图4、图5可以看出,转速为 1000 rad/s 时,减缩与非减缩转子第 1 阶正、反进动的振型几

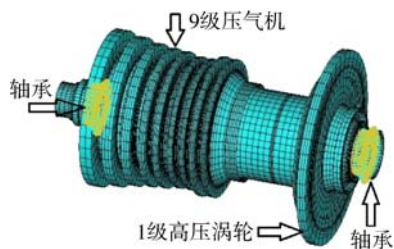


图2 验证用的高压转子模型

Fig.2 High pressure rotor model for verification

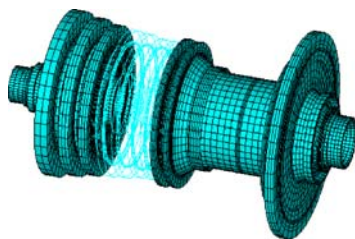


图3 具有旋转子结构的减缩模型

Fig.3 Reduced model with rotating substructure

表 1 减缩前后模型规模比较
Table 1 Scale of model before and after reduction

	单元数	节点数	自由度数
原模型	321 44	502 80	150 840
减缩模型	256 66	397 44	119 232
减缩量/%	20.1	21.0	21.0

乎完全相同. 为了定量评价振型的相似性, 需要进行振型相似性计算, 减缩模型与原模型的振动特性计算结果见表 2.

由表 2 可见, 减缩模型在转速为 0 rad/s 和转速为 1000 rad/s 的情况下前 20 阶固有频率与原模型几乎相同, 最高固有频率百分误差为 0.43%, 出现在第 12 阶无转速振动和第 14 阶有转速振动中. 当转速为 1000 rad/s 时, 除第 17 阶振型的 C_{ma} 为 0.98 外, 其余各阶振型的 C_{ma} 为 1.00, 说明减缩模型的前 20 阶振型与原模型几乎没有差别. 第 20 阶的固有频率已经超过 600 Hz, 约为

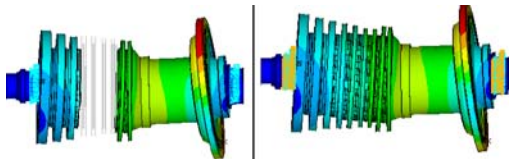


图 4 转子转速为 1000 rad/s 时第 1 阶反进动振型图
Fig. 4 First backward whirl mode of vibration of rotor with rotating speed of 1000 rad/s

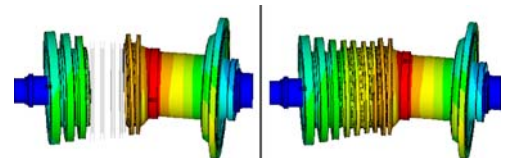


图 5 转子转速为 1000 rad/s 第 1 阶正进动振型图
Fig. 5 First forward whirl mode of vibration of rotor with rotating speed of 1000 rad/s

36 000 r/min, 该转子工作转速约为 15 000 r/min, 减缩模型在 2 倍于工作转速范围内的固有频率和振型精确.

表 2 减缩模型与原模型的振动特性计算结果
Table 2 Calculational results of vibration characteristic of reduced model and original model

阶次	转速为 0 rad/s			转速为 1000 rad/s			
	减缩模型 频率/Hz	原模型 频率/Hz	$E_p/\%$	减缩模型 频率/Hz	原模型 频率/Hz	$E_p/\%$	C_{ma}
1	279.03	279.01	0.01	237.85	237.90	-0.02	1.00
2	279.03	279.01	0.01	308.37	308.42	-0.02	1.00
3	312.54	312.53	0	312.53	312.52	0	1.00
4	344.81	344.63	0.05	344.81	344.62	0.06	1.00
5	357.28	357.17	0.03	357.28	357.17	0.03	1.00
6	364.34	364.00	0.09	364.34	364.00	0.09	1.00
7	375.91	375.63	0.07	375.91	375.63	0.07	1.00
8	390.47	390.01	0.12	390.47	390.01	0.12	1.00
9	463.56	463.49	0.02	410.88	410.68	0.05	1.00
10	463.56	463.49	0.02	425.29	423.87	0.34	1.00
11	468.94	468.11	0.18	450.55	449.83	0.16	1.00
12	500.70	498.58	0.43	457.29	457.55	-0.06	1.00
13	513.93	513.91	0	468.89	468.07	0.18	1.00
14	518.49	518.28	0.04	500.70	498.57	0.43	1.00
15	518.49	518.28	0.04	504.31	505.37	-0.21	1.00
16	569.82	567.72	0.37	514.00	513.97	0.01	1.00
17	569.82	567.72	0.37	614.38	611.83	0.42	0.98
18	591.85	591.60	0.04	658.55	658.41	0.02	1.00
19	591.85	591.60	0.04	748.88	746.67	0.30	1.00
20	608.10	607.68	0.07	770.92	770.63	0.04	1.00

2.3 基于减缩模型的临界转速计算

原模型计算临界转速的 Campbell 图如图 6 所示,减缩模型计算临界转速的 Campbell 图如图 7 所示。

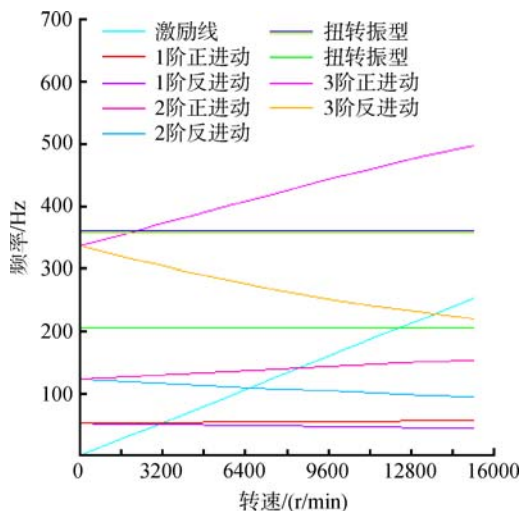


图6 原模型计算临界转速的 Campbell 图

Fig. 6 Campbell diagram of critical rotating speed by original model

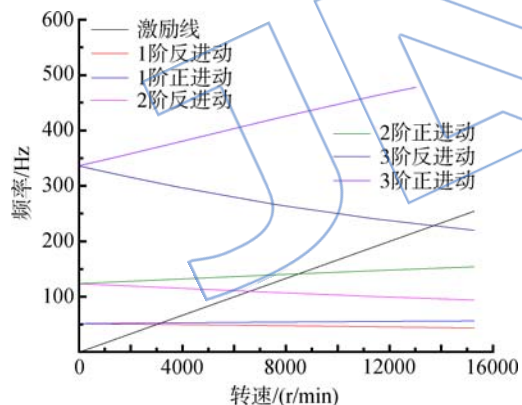


图7 减缩模型计算临界转速的 Campbell 图

Fig. 7 Campbell diagram of critical rotating speed by reduced model

从图 6 和图 7 可以看出,两种模型给出的转子固有频率与转速关系曲线基本相同。因为扭转振动和轴向振动不会影响临界转速,所以在减缩转子模型的 Campbell 图中,没有给出扭转振型的频率线。两种方法求得的前 5 阶临界转速的比较见表 3。

从表 3 的计算结果可以看出,用减缩模型计算的临界转速与原模型的最大误差为 0.46%,证明了减缩模型计算临界转速的准确性。

表3 原模型和减缩模型计算的临界转速比较

Table 3 Critical rotating speed comparison of original model and reduced model

阶次	原模型 临界转速/ (r/min)	减缩模型 临界转速/ (r/min)	误差/%
1 阶反进动	3036	3032	-0.13
1 阶正进动	3191	3201	0.31
2 阶反进动	6623	6604	-0.29
2 阶正进动	8544	8505	-0.46
3 阶反进动	13761	13724	-0.27

3 结 论

针对 3-D 有限元转子模型减缩问题,基于复模态理论的减缩方法很难实现,本文给出了可以考虑陀螺效应和转速变化的旋转子结构减缩方法,并利用 ANSYS 程序将其实现。经验证,通过合理选择主自由度,应用旋转子结构法进行减缩的转子模型在不同转速下的振动特性与原模型几乎完全相同,两种模型求得的临界转速也几乎完全相同,证明了旋转子结构法的可行性。

本文介绍的方法可以应用于实际的大型 3-D 有限元转子模型,同一个模型可以使用多个子结构,也适用于具有不同转速的双转子或多转子系统。该方法可以考虑陀螺效应,不能同时考虑阻尼,因而适用于局部阻尼转子系统。

由于旋转子结构法是一种基于静态减缩方法的近似减缩,减缩后的模型分析高频振动时精确性降低,选择主自由度也需要有一定的经验,因此,在应用中需要根据实际情况合理选择主自由度,并对转子工作转速范围内模型的精确性进行验证。

参考文献:

- [1] MA Weimeng, WANG Jianjun. 3-D solid finite element modeling and rotor dynamics of large rotating machines: application to an industrial turbo engine[J]. Advanced Materials Research, 2012, 591/592/593: 1879-1885.
- [2] Rao J S, Sreenivas R. Dynamics of a three level rotor system using solid elements[R]. ASME Paper GT2003-38783, 2003.
- [3] 陈萌,洪杰,朱彬,等. 基于实体单元的转子动力学特性计算方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(1): 10-13.
CHEN Meng, HONG Jie, ZHU Bin, et al. Rotor dynamic analysis based on solid element[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(1): 10-

13. (in Chinese)
- [4] 陈萌, 马艳红, 刘书国, 等. 航空发动机整机有限元模型转子动力学分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(9): 1013-1016.
- CHEN Meng, MA Yanhong, LIU Shuguo, et al. Rotor dynamic analysis of whole aero-engine models based on finite element method[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(9): 1013-1016. (in Chinese)
- [5] Chaudhry J A. 3-D finite element analysis of rotors in gas turbines, steam turbines and axial pumps including blade vibrations[D]. Virginia, US: University of Virginia, 2011.
- [6] 张锦, 刘晓平. 叶轮机振动模态分析理论及数值方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [7] 张景绘. 动力学系统建模[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [8] 刘彬, 丁桦, 梁乃刚. 结构动力计算中自由度减缩方法概述[C]//应用力学进展论文集. 北京: 中国科学院力学研究所, 2004: 154-165.
- [9] Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. AIAA Journal, 1965, 3(2): 380.
- [10] O'Callahan J C. A procedure for an improved reduced system (IRS) model[R]. Las Vegas, US: 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
- [11] O'Callahan J C, Avitabile P, Riemer R. System equivalent reduction expansion process (SEREP)[R]. Las Vegas, US: 7th International Modal Analysis Conference, 1989.
- [12] Das A S, Dutt J K. Reduced model of a rotor-shaft system using modified SEREP[J]. Mechanics Research Communications, 2008, 35(6): 398-407.
- [13] Khulief Y A, Mohiuddin M A. On the dynamic analysis of rotors using modal reduction[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1997, 26(1): 41-45.
- [14] 曾亮, 李琳. 阻尼陀螺系统动力响应的有限元复模态分析方法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(10): 1847-1853.
- ZENG Liang, LI Lin. Dynamic response of damped gyroscopic system with complex modal method[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(10): 1847-1853. (in Chinese)
- [15] Stringer D B, Sheth P N, Allaire P E. Modal reduction of geared rotor systems with general damping and gyroscopic effects[J]. Journal of Vibration and Control, 2010, 7(7): 975-987.
- [16] Shanmugam A, Padmanabhan C. A fixed-free interface component mode synthesis method for rotordynamic analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(3/4/5/6): 664-679.
- [17] Wagner M B, Younan A, Allaire P, et al. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: a survey and review[J]. International Journal of Rotating Machinery, 2010, Article ID 273716: 1-17.